Planificação **Aula 16** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 11/05, 16h30

Aula 16 1/2

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Menores principais de uma matriz

Definição: Chama-se menor principal de ordem k de uma matriz quadrada $n \times n$ ao determinante da submatriz de ordem k que se obtém dela eliminando as últimas $n-k$ linhas e as últimas $n-k$ colunas

Notação:
- $\Delta_k \rightsquigarrow$ menor principal de ordem k
- $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \to$ cadeia de menores principais

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então:

- $\Delta_1 = |a_{11}|$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $\Delta_3 = |A|$

Exercício: Calcular os menores principais da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

↳ Resolver antes da aula online

Solução: $\Delta = (-3; 7; -2)$

Notas:
- No exercício anterior, dizemos que o sinal de Δ é $(-; +; -)$, e vamos usar esta notação no teorema seguinte.
- Zero não é positivo nem negativo.

$\boxed{\text{Slides 9 e 13}}$ **Classificação de pontos críticos**

Teste dos menores principais da Hessiana

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$ um ponto crítico de f.
Suponha-se que f é de classe C^2 numa bola centrada em p. Então:

1) Se $\det(Hf(p)) \neq 0$, então:

a) Se $\Delta = (+,+,+,\dots,+)$ então $f(p)$ é um **mínimo local** de f.

b) Se $\Delta = (-,+,-,+,\dots)$ então $f(p)$ é um **máximo local** de f.

c) Se nenhuma das situações anteriores ocorrer, então p é um **ponto de sela** de f.

2) Se $\det(Hf(p)) = 0$, nada se pode concluir.

Notas:
- Se $n=2$, este método coincide com o teste das segundas derivadas dado na aula 14.
- Ver no slide 8 outro método baseado nos valores próprios da matriz Hessiana.

Exercício 1: Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

b) $f(x,y,z) = \ln(z) - z + (\ln y - z) \times (2x-1)$, $y>0 \wedge z>0$

c) $f(x,y) = xy\,e^{x-y}$

Exercício 2: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

a) Mostre que f tem máximo global, mas não tem mínimo global (em $\mathbb{R}^2$)

b) Justifique que f possui extremos globais no círculo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2\}$ e calcule tais extremos.

TPCs: Folha prática 3: 29 e 38
Teste 2, 13/06/18 ⇝ Ex. 1c)
Ex. Recurso, 02/07/18 ⇝ Ex. 4
Ex. Final, 22/06/17 ⇝ Ex. 2

Aula 16

1) a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

1º Passo: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2$

2º Passo: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ x = 2y \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - y + 1 = 0 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

Ponto Crítico: $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$

3º Passo: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2x - y + 1)'_x = 2$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2x - y + 1)'_y = -1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = (2x - y + 1)'_z = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$

Teo. Schwarz

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2y - x)'_y = 2$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = (2y - x)'_z = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2z - 2)'_z = 2$

4º Passo: $Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5º Passo: Usar teste dos menores principais:

$\Delta_1 = 2$; $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$; $\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - (0 + 0 + 2) = 6$

$\Delta = (+, +, +)$

Logo $f\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ é um mínimo local

$\hookrightarrow TPC = \ldots = -\frac{4}{3}$

b) $f(x,y,z) = \ln(z) - z + (\ln y - z) \times (2x - 1)$, $y > 0 \wedge z > 0$

1º Passo: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (\ln y - z) \times 2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y} \times (2x - 1)$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{z} - 1 - 1 \times (2x - 1) = \dfrac{1}{z} - \cancel{1} - 2x + \cancel{1}$

2º Passo: $\begin{cases} (\ln y - z) \times 2 = 0 \\ 1/y \times (2x - 1) = 0 \\ 1/z - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 1/y = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \vee \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 2x - 1 = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{z} - 2 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$

Impossível

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln y - 1) \times 2 = 0 \\ \underline{\qquad} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y - 1 = 0 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 1 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^1 = e \\ x = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$

Ponto Crítico $\left(1/2, e, 1\right)$

3º Passo: $\frac{d^2f}{dx^2}=0$; $\frac{d^2f}{dydx}=\frac{1}{y}\times 2=\frac{d^2f}{dxdy}$; $\frac{d^2f}{dzdx}=-2=\frac{d^2f}{dxdz}$; $\frac{d^2f}{dy^2}=-\frac{1}{y^2}\times(2x-1)$

$\frac{d^2f}{dzdy}=0=\frac{d^2f}{dydz}$; $\frac{d^2f}{dz^2}=-\frac{1}{z^2}$

4º Passo: $$Hf(x,y,z)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{y} & -2 \\ \frac{2}{y} & -\frac{2x-1}{y^2} & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix}$$

5º Passo: $$Hf\left(\frac{1}{2},e,1\right)=\begin{bmatrix} 0 & 2/e & -2 \\ 2/e & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ $\Delta_1=0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 2/e \\ 2/e & 0 \end{vmatrix}=\frac{-4}{e^2}$; $\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{e} & -2 \\ \frac{2}{e} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\underset{\text{T.P.C.}}{=}\dots=\frac{4}{e^2}$

$\Delta=(0;-;+)$

Portanto $\left(\frac{1}{2},e,1\right)$ é ponto de sela.

c) $f(x,y)=xy\,e^{x-y}$

1º Passo: $\frac{df}{dx}=ye^{x-y}+xy\times 1e^{x-y}=(1+x)ye^{x-y}$; $\frac{df}{dy}=x\,e^{x-y}+xy\times(-1)e^{x-y}=(1-y)xe^{x-y}$

2º Passo: $\begin{cases}(1+x)y\,e^{x-y}=0\\(1-y)xe^{x-y}=0\end{cases}\underset{e^{x-y}\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(1+x)y=0\\(1-y)x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+x=0\\ \_\_\_\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\ \_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\(1-y)\times(-1)=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\(1-0)x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$ Pontos Críticos: $P_1=(-1;1)$ e $P_2=(0,0)$

3º Passo: $\frac{d^2f}{dx^2}=\left((1+x)y\,e^{x-y}\right)'_x=1ye^{x-y}+(1+x)ye^{x-y}=(1+1+x)y\,e^{x-y}=(2+x)\,y\,e^{x-y}$

$\frac{d^2f}{dy\,dx}=\left((1+x)y\,e^{x-y}\right)'_y=(1+x)e^{x-y}+(1+x)y\times(-1)e^{x-y}=(1-y)(1+x)e^{x-y}=\frac{d^2f}{dxdy}$

$\frac{d^2f}{dy^2}=\left((1-y)x\,e^{x-y}\right)'_y=-1\times xe^{x-y}+(1-y)x\times(-1)e^{x-y}=(-1+(1-y)\times(-1))xe^{x-y}=(-2+y)xe^{x-y}$

4º Passo: $$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} y(2+x)e^{x-y} & (1-y)(1+x)e^{x-y} \\ (1-y)(1+x)e^{x-y} & (-2+y)\,x\,e^{x-y} \end{bmatrix}$$

5º Passo: $P_1=(-1,1)$

$$Hf(-1,1)=\begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=e^{-2}>0$

$\Delta_2=e^{-2}\times e^{-2}=e^{-4}>0$

$\Delta=(+,+)$

Logo $\underbrace{f(-1,1)}_{\hookrightarrow\,-e^{-2}}$ é um mínimo local

$P_2=(0,0)$

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=0$

$\Delta_2=-1$

$\Delta=(0;-)$

Então $(0,0)$ é um ponto de sela de f.

2) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}^2$

a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\geq 0 \Leftrightarrow 1+x^2+y^2\geq 1$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{1+x^2+y^2}\leq 1$

Como $f(0,0)=1$ então 1 é o máximo global de f.

f não tem mínimo global pois exemplo, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0^+$

b) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<2\}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua em } C \\ C \text{ é fechado e limitado}\end{array}\right\}$ pelo T. Weierstrass f possui extremos globais em C.

Máximo global é $f(0,0)=1$, pois $(0,0)\in C$

Verificar se f tem mais pontos críticos em C: $(1+x^2+y^2)^2\neq 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad \begin{cases}\dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}=0\\[2ex] \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x=0\\ -2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

O único ponto crítico de f é $(0,0)$ e por isso o mínimo global tem de ser atingido na fronteira de C: $\boxed{x^2+y^2=2}$

Nestes pontos, o valor f é $\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ mínimo global